PART2　独立な確率変数

例題

1 個のさいころを 2 回投げ，1 回目，2 回目に出る目をそれぞれ X，Y とする。

(1)　XY の期待値を求めよ。

(2)　$X+Y$ の分散を求めよ。

(3)　$X+2Y$ の分散を求めよ。

Point Pickup

練習

3 枚の硬貨を投げ，表の出た枚数を X とする。また，1 個のさいころを投げ，出た目が 4 以上のとき $Y=4$，それ以外の目が出たとき，その目を Y とする。

(1)　XY の期待値を求めよ。

(2)　$X+Y$ の分散を求めよ。

(3)　$2X+3Y$ の分散を求めよ。

第6講　PART2 確認問題

表に1，裏に3と書かれた1枚のコインを投げて，出た数をXとする。また，1個のさいころを投げ，出た目が4以下のとき$Y=2$，それ以外の目が出たとき$Y=5$とする。

1　XYの期待値を求めよ。

$E(XY)=$ ［ア］

2　$X+Y$の分散を求めよ。

$V(X+Y)=$ ［イ］

3　$3X+4Y$の分散を求めよ。

$V(3X+4Y)=$ ［ウエ］

PART2　独立な確率変数

例題

1個のさいころを2回投げ，1回目，2回目に出る目をそれぞれ X，Y とする。

(1)　XY の期待値を求めよ。

(2)　$X+Y$ の分散を求めよ。

(3)　$X+2Y$ の分散を求めよ。

確率変数 X，Y の確率分布はいずれも下の表のようになる。

出る目	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

(1)　$E(X)=E(Y)=(1+2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$

X，Y は独立であるから，XY の期待値は

$$E(XY)=E(X)E(Y)=\frac{7}{2}\cdot\frac{7}{2}=\frac{49}{4}$$

(2)　$V(X)=E\left(X^2\right)-\{E(X)\}^2=\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2\right)\cdot\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$

$V(Y)=\frac{35}{12}$

X，Y は独立であるから，$X+Y$ の分散は

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=\frac{35}{12}+\frac{35}{12}=\frac{35}{6}$$

(3)　X，Y は独立であるから，$X+2Y$ の分散は

$$V(X+2Y)=V(X)+2^2\,V(Y)=\frac{35}{12}+4\cdot\frac{35}{12}=\frac{175}{12}$$

練習

3 枚の硬貨を投げ，表の出た枚数を X とする。また，1 個のさいころを投げ，出た目が 4 以上のとき $Y=4$，それ以外の目が出たとき，その目を Y とする。

(1)　XY の期待値を求めよ。

(2)　$X+Y$ の分散を求めよ。

(3)　$2X+3Y$ の分散を求めよ。

確率変数 X，Y の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Y	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

(1)　$E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$

$E(Y)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{3}{6}=3$

X，Y は独立であるから，XY の期待値は

$$E(XY)=E(X)E(Y)=\frac{3}{2}\cdot 3=\frac{9}{2}$$

(2)　$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\left(0^2\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{3}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)^2=3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$

$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2=\left(1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}+4^2\cdot\frac{3}{6}\right)-3^2=\frac{31}{3}-9=\frac{4}{3}$

X，Y は独立であるから，$X+Y$ の分散は

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=\frac{3}{4}+\frac{4}{3}=\frac{25}{12}$$

(3)　X，Y は独立であるから，$2X+3Y$ の分散は

$$V(2X+3Y)=2^2\,V(X)+3^2\,V(Y)=4\cdot\frac{3}{4}+9\cdot\frac{4}{3}=15$$

第 6 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：6

[解説]

確率変数 X，Y の確率分布は，次の表のようになる。

X	1	3	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Y	2	5	計
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{2}=2$$

$$E(Y)=2\cdot\frac{2}{3}+5\cdot\frac{1}{3}=3$$

X，Y は独立であるから，XY の期待値は

$$E(XY)=E(X)E(Y) \quad \text{[A]}$$
$$=2\cdot3=\mathbf{6}$$

[A]　独立な確率変数の積の期待値
確率変数 X，Y が互いに独立であるとき
$E(XY)=E(X)E(Y)$

2 [正解] イ：3

[解説]

確率変数 X, Y の確率分布は，次の表のようになる。

X	1	3	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Y	2	5	計
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

これより，$E(X)=2$，$E(Y)=3$　よって，

$$V(X)=(1-2)^2\cdot\frac{1}{2}+(3-2)^2\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$V(Y)=(2-3)^2\cdot\frac{2}{3}+(5-3)^2\cdot\frac{1}{3}=2$$

X, Y は独立であるから，$X+Y$ の分散は

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y) \quad \text{[B]}$$
$$=1+2=\mathbf{3}$$

[B]　独立な確率変数の和の分散
確率変数 X, Y が互いに独立であるとき
$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

3 [正解] ウエ：41

[解説]

確率変数 X, Y の確率分布より，期待値は

$$E(X)=2,\ E(Y)=3$$

であるから

$$V(X)=1,\ V(Y)=2$$

X, Y は独立であるから，$3X+4Y$ の分散は

$$V(3X+4Y)=3^2\,V(X)+4^2\,V(Y) \quad \text{[C]}$$
$$=9\cdot1+16\cdot2=\mathbf{41}$$

[C]　確率変数 X, Y が互いに独立で，a, b が定数であるとき
$V(aX+bY)=a^2\,V(X)+b^2\,V(Y)$